

Rechenregeln und Standardableitungen

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \quad c \text{ Konstante}$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{Kettenregel}$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \text{Produktregel}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad \text{Quotientenregel}$$

$$\begin{aligned} \ln x &= \log_e x \\ \ln e &= \log_e e = 1 \end{aligned}$$

$f(x)$	$f'(x)$	
$\rightarrow x^p$	$p \cdot x^{p-1}$	$p=0: x^0=1$ für jedes p

a^x	$a^x \ln a$	für jedes $a > 0$
-------	-------------	-------------------

e^x	e^x
-------	-------

$\log_a x$	$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$	$a > 0, a \neq 1$
------------	-------------------------------------	-------------------

$\ln x$	$\frac{1}{x}$
---------	---------------

$\sin x$	$\cos x$
----------	----------

$\cos x$	$-\sin x$
----------	-----------

$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
----------	----------------------

$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
-------------	--------------------------

$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
-------------	---------------------------

$$\frac{\arctan x}{\frac{1}{1+x^2}}$$

Bsp 1) $(x^4 - 3x^2 + 2)' = (x^4)' - 3(x^2)' + 2 \cdot (1)'$
 $= 4x^3 - 3 \cdot 2x + 2 \cdot 0 = 4x^3 - 6x$

2) $((x^3 - 1)^5)' = 5(x^3 - 1)^4 \cdot (x^3 - 1)' = 5(x^3 - 1)^4 \cdot 3x^2$
 $= 15x^2(x^3 - 1)^4$
 $f(\cdot) = \cdot^5, g(\cdot) = (\cdot^3 - 1)$

3) $(\sin(x^2 + 1))' = \cos(x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1)'$
 $= \cos(x^2 + 1) \cdot 2x$

4) $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}} \sqrt{x}} = \frac{1}{x^1 \cdot x^{1/2}} = \frac{1}{x^{1+1/2}} = \frac{1}{x^{3/2}} = x^{-3/2}$

$f'(x) = -\frac{3}{2} x^{-3/2 - 1} = -\frac{3}{2} x^{-5/2} = -\frac{3}{2} x^{-2 - 1/2}$
 $= -\frac{3}{2} \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$

► Höhere Ableitungen

Bsp 1) $f(x) = e^x, f'(x) = e^x$

$f''(x) = (f'(x))' = (e^x)' = e^x$

$f'''(x) = (f''(x))' = (e^x)' = e^x$

$$2) \quad f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f'(x) = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2}$$

$$f''(x) = (f'(x))' = (-x^{-2})' = -(-2) \cdot x^{-3} = 2x^{-3}$$

$$f'''(x) = (f''(x))' = (2x^{-3})' = 2(-3) \cdot x^{-4} = -6x^{-4}$$

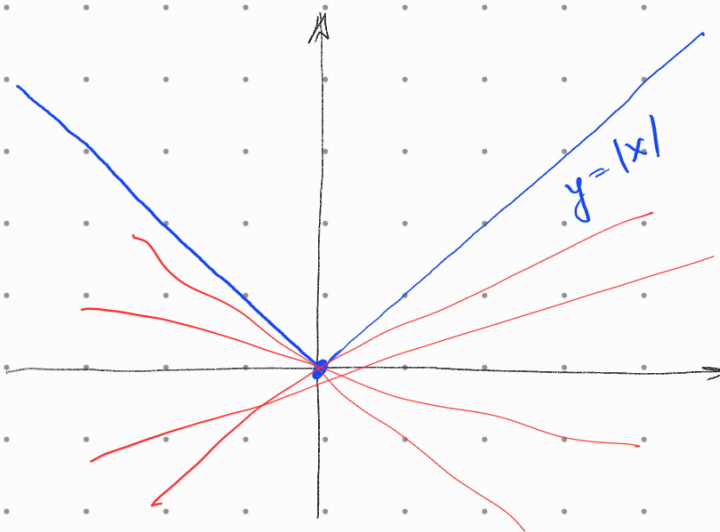
... usw.

$$3) \quad f(x) = \cos x, \quad f'(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = (-\sin x)' = -\cos x, \quad f'''(x) = \sin x$$

$$f^{IV}(x) = f^{(4)}(x) = (\sin x)' = \cos x, \dots$$

► Differenzierbarkeit



Die Zahl $f'(a)$ ist die Steigung der Tangente an den Graphen von $y = f(x)$ im Punkt a .

Falls die Tangente nicht existiert (Graph nicht glatt) oder senkrecht

steht, sagt man, dass f im Punkt a nicht diff-bar ist.

Bsp 1) $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

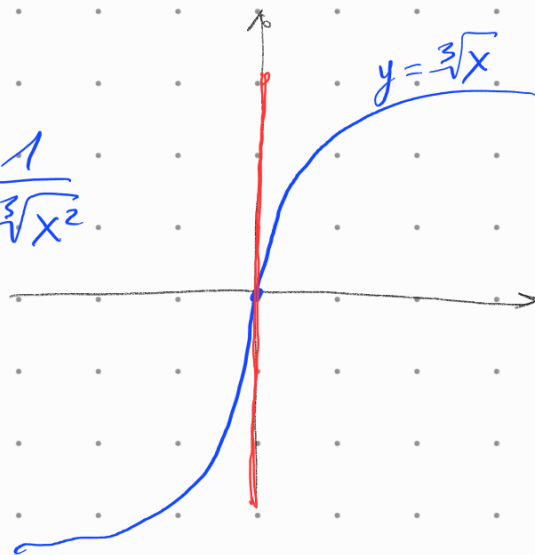
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}, \quad f'(0) \text{ nicht existiert}$$

$$2) f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(0) = \text{?}$$

$f(x)$ ist im Punkt 0
nicht diff-bar



► Intervalle der Monotonie

1) $f(x)$ ist (streng) monoton wachsend
auf I , falls für alle $x_1 < x_2$ aus I
gilt $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$)

2) $f(x)$ ————— " ————— fallend
————— "
————— $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$)

Ist f diff-bar auf I , so gilt

1) $f(x)$ monoton wachsend auf I $\Leftrightarrow$ ^{genau dann, wenn}
 $f'(x) \geq 0$. $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ streng mon. wachsend

2) $f(x)$ ————— fallend ————— $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0$.
 $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ streng monoton fallend

Bsp Bestimme Intervalle der Monotonie und skizziere den Graphen

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4$

$$f'(x) = 4x^3 - 4 \cdot 3x^2 + 0 = 4x^2(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x-3) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 = 0 & x = 0 \\ x-3 = 0 & x = 3 \end{cases}$$

$f'(x) = 0$ für $x = 0$ und $x = 3$

	$x = -1$ $(-\infty, 0)$	0	$x = 1$ $(0, 3)$	3	$x = 100$ $(3, \infty)$
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	4 weder Min. noch Max	$\searrow$	-23 Min	$\nearrow$

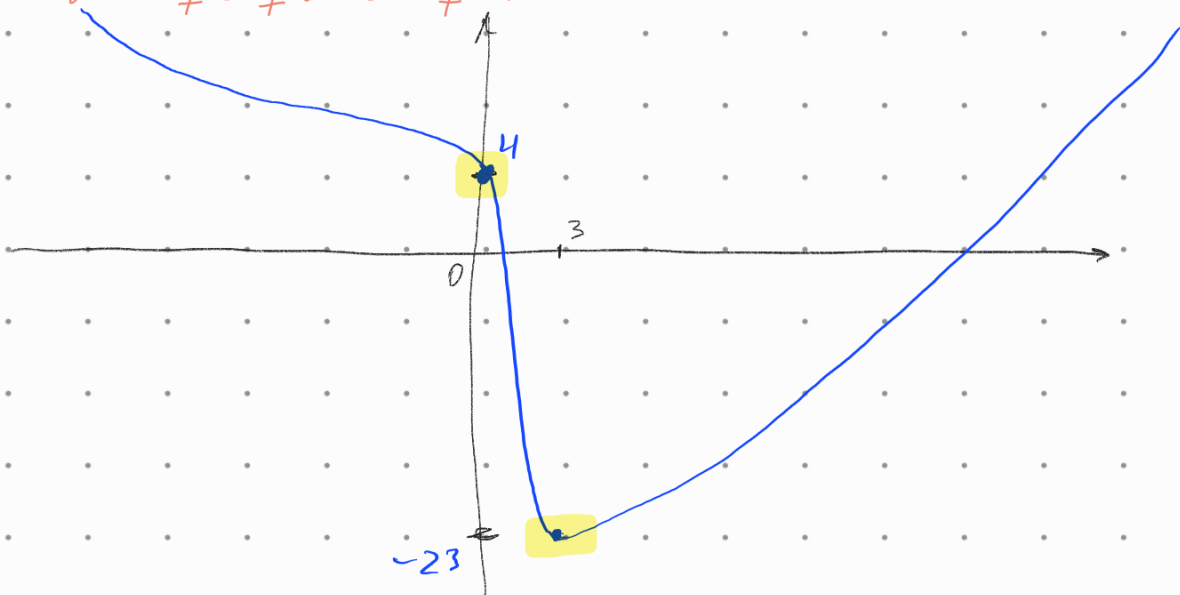
$$f'(-1) = 4(-1)^2(-1-3) = -$$

$$f'(1) = 4(1)^2(1-3) = -$$

$$f'(100) = 4(100)^2(100-3) = +$$

$$f(0) = 4$$

$$f(3) = -23$$



$$2) f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} \quad \underline{x \neq -1}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - 1(x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2-1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} = \frac{(x - (-1-\sqrt{2}))(x - (-1+\sqrt{2}))}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+2x-1=0$$

$$(x^2+2x+1) - 1 - 1 = 0$$

$$(x+1)^2 - 2 = 0$$

$$(x+1)^2 = 2 \Rightarrow x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

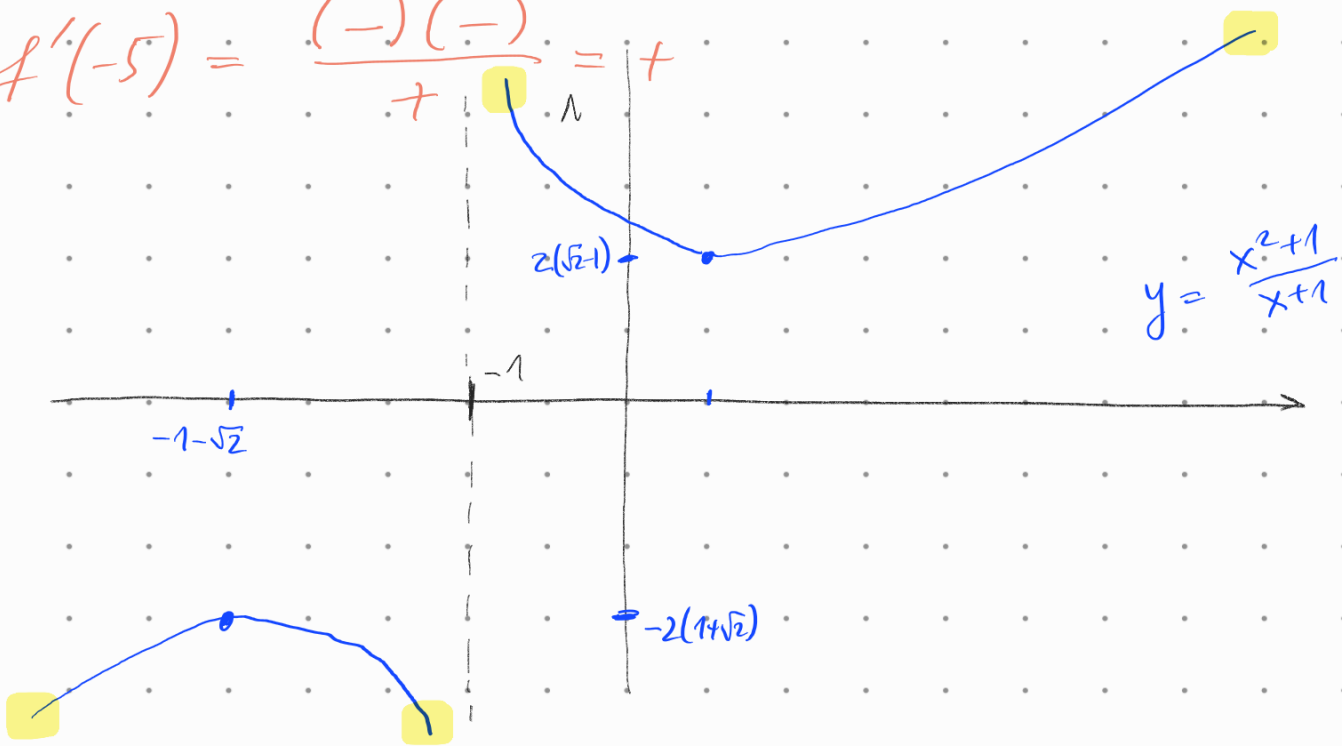
x^2+px+q hat NS x_1, x_2 . Dann gilt

$$x^2+px+q = (x-x_1)(x-x_2)$$

(Vieta)

	$(-\infty, -1-\sqrt{2})$	$-1-\sqrt{2}$	$(-1-\sqrt{2}, -1)$	-1	$(-1, \sqrt{2}-1)$	$\sqrt{2}-1$	$(\cdot, \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	$\downarrow$	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$-2(1+\sqrt{2})$ Max	$\searrow$	$\downarrow$	$\searrow$	$2(\sqrt{2}-1)$ Min	$\nearrow$

$$f'(-5) = \frac{(-)(-)}{+} = +$$



Bsp Bestimme das globale Min und Max der Funktion $f(x) = |x^2 - 1|$ auf $I = [-2, 2]$, d.h. $-2 \leq x \leq 2$

$$f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & , \quad x^2 - 1 \geq 0 \\ -(x^2 - 1) & , \quad x^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq -1 \text{ und } x \geq 1 \\ 1 - x^2, & -1 < x < 1 \end{cases} \quad x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < -1 \text{ und } x > 1 \\ -2x & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$f'(-1) = \begin{cases} -2 \\ 2 \end{cases} \quad \Downarrow \quad f'(1) = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$$

f ist in Punkten $+1$ und -1 nicht diff-bar

Punkte verdächtig

$$f'(x) = 0 \quad \text{nur für } x = 0$$

	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2
$f'(x)$		-	$\Downarrow$	+	0	-	$\Downarrow$	+	
$f(x)$	3 Max	$\searrow$	0 Min	$\nearrow$	1 Max	$\searrow$	0 Min	$\nearrow$	3 Max

$$f(x) = |x^2 - 1|$$

$$f(-2) = f(2) = 3$$

$$f(-1) = f(1) = 0$$

$$f(0) = 1$$

$$\max_{x \in [-2, 2]} f(x) = 3 \quad \text{erreicht für } x = \pm 2$$

$$\min_{x \in [-2, 2]} f(x) = 0 \quad \text{erreicht für } x = \pm 1$$

